

ה א ו נ י ב ר ס י ט ה ה פ ת ו ח ה

20440

אוטומטים ושפות פורמליות
חוברת הקורס - אביב 2013

כתב: יוסי קאופמן

מרץ 2013 - סמסטר אביב – תשע"ג

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנט
ב	1. לוח זמנים ופעילויות
ד	2. תיאור המטלות
ד	מבנה המטלות
ד	ניקוד המטלות
ה	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15
13	ממ"ן 16
15	ממ"ן 17
17	ממ"ן 18

אל הסטודנט,

אני מקדם את פניך בברכה עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אוטומטים ושפות פורמליות".

בחוברת זו תמצא את הדרישות לקבלת נקודות זכות בקורס, לוח הזמנים ומטלות.

לקורס קיים אתר באינטרנט בו תמצאו חומרי למידה נוספים, אותם מפרסם/מת מרכז/ת ההוראה. בנוסף, האתר מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס, תמצאו באתר שה"ם בכתובת:

<http://telem.openu.ac.il>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם, תמצאו באתר הספרייה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

שעות הייעוץ שלי בכל יום ה', בשעות 00:13-00:15, בטלפון 09-7781237. פגישה יש לתאם מראש. ניתן לפנות גם בדואר אלקטרוני: yossi@openu.ac.il

מילת התנצלות לסטודנטיות בקורס: פניות המופיעות בחומר הלימוד מנוסחות בלשון זכר - זהו למרבה הצער הנוהג המקובל. הפניות האלו מכוונות, כמובן, לכל קוראי החומר.

אני מאחל לך לימוד פורה ומהנה.

בברכה,

יוסי קאופמן

מרכז ההוראה בקורס

1. לוח זמנים ופעילויות (20440 / ב2013)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ן (למנחה)
1	8.3.2013-3.3.2013	1	מפגש ראשון	
2	15.3.2013-10.3.2013	2		ממ"ן 11 15.3.2013
3	22.3.2013-17.3.2013	2	מפגש שני	
4	29.3.2013-24.3.2013 (ב-ו פסח)	3		ממ"ן 12 29.3.2013
5	5.4.2013-31.3.2013 (א-ב פסח)	3	מפגש שלישי	
6	12.4.2013-7.4.2013 (ב יום הזכרון לשואה)	4		ממ"ן 13 12.4.2013
7	19.4.2013-14.4.2013 (ב יום הזכרון) (ג יום העצמאות)	4	מפגש רביעי	
8	26.4.2013-21.4.2013	5		ממ"ן 14 26.4.2013
9	3.5.2013-28.4.2013 (א ל"ג בעומר)	5-6	מפגש חמישי	

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

לוח זמנים ופעילויות - המשך

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח הממ"ן (למנחה)
10	10.5.2013-5.5.2013 (ד יום ירושלים)	6	מפגש שישי	ממ"ן 15 10.5.2013
11	17.5.2013-12.5.2013 (ג-ד שבועות)	7		ממ"ן 16 17.5.2013
12	24.5.2013-19.5.2013	8	מפגש שביעי	
13	31.5.2013-26.5.2013	8		ממ"ן 17 31.5.2013
14	7.6.2013-2.6.2013	9	מפגש שמיני	
15	14.6.2013-9.6.2013	9		ממ"ן 18 14.6.2013

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

2. תיאור המטלות

קרא היטב עמודים אלו לפני שתתחיל לענות על השאלות

פתרון המטלות הוא חלק בלתי נפרד מלימוד הקורס - הבנה מעמיקה של חומר הלימוד דורשת תרגול רב. המטלות תיבדקנה על-ידי המנחה ותוחזרנה לך בצירוף הערות המתייחסות לתשובות.

מבנה המטלות

כל מטלה מורכבת מכמה שאלות. בראש כל שאלה מצוין משקלה היחסי בקביעת ציון המטלה.

את הפתרונות למטלה עליך לרשום על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה.

אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, אל תהסס להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעות הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר.

המטלות מלוות את יחידות הלימוד בקורס. להלן פירוט המטלות והיחידות שאליהן מתייחסת כל מטלה. בחלק מהמטלות תופענה גם שאלות המתייחסות ליחידות קודמות, שכבר נלמדו.

ניקוד המטלות

כל מטלה נקבע משקל; ניתן לצבור עד 20 נקודות. חובה להגיש מטלות במשקל של 11 נקודות לפחות.

ללא צבירת 11 נקודות בהגשת מטלות לא ניתן יהיה לגשת לבחינת הגמר

להלן פירוט הניקוד לכל מטלה:

ניקוד	ממ"ן
2	11
2	12
2	13
4	14
2	15
2	16
3	17
3	18

3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

- א. צבירת 11 משקלים לפחות במטלות.
- ב. ציון של לפחות 60 נקודות בבחינת הגמר.
- ג. ציון סופי בקורס של 60 נקודות לפחות.

לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן תצליחו להשיב באופן חלקי בלבד.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 15.3.2013

סמסטר: 2013ב

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערה: אם"ם הוא סימון מקובל לאם ורק אם.

שאלה 1 (11%)

נתון מרחב X . תהייה A ו- B קבוצות חלקיות ל- X . הוכח ש $A \cup B = B \iff A \cap B = A$

שאלה 2 (12%)

נתונות השפות הבאות מעל $\{a,b\}$:

$$L_1 = \{\varepsilon\}$$

$$L_2 = \phi$$

$$L_3 = \{\varepsilon, a, aa, bba, bbabb\}$$

$$L_4 = \{aa, aaabaaa, b, bbb, babb, babbbb\}$$

$$L_5 = \{a, ab, aaabaaa, babbb, babb\} \quad L_6 = \{\varepsilon, bb\}$$

מהן השפות הבאות? 1. $L_5 - L_4$ 2. L_5^R 3. $L_4 L_6$ 4. $L_1 L_3 \cup L_2 L_3$

שאלה 3 (32%)

תהייה L, L_1, L_2 ו- L_3 שפות מעל א"ב Σ . הוכח או הפרך:

$$1. (L_1)^* (L_2)^* = (L_1 L_2)^* \quad 3. L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_3)$$

$$2. (L_2 \cap L_3) L_1^+ = L_2 L_1^+ \cap L_3 L_1^+ \quad 4. \overline{L}^R = \overline{L^R}$$

הדרכה: כדי להוכיח שוויון יש להוכיח את שני כיווני ההכלה בין השפות הנתונות.

כדי להפריך שוויון מספיק להראות מקרה פרטי של השפות L_1, L_2 ו- L_3 , ולהציג מילה לדוגמה שנמצאת באחת השפות (המוגדרות מצדי השוויון) אך לא בשניה.

שאלה 4 (25%)

- נגדיר יחס בקבוצת המילים מעל $\{a,b\}$: xRy אם y היא סיפא של x או ששתיהן מסתיימות באות זהה.
האם היחס טרנזיטיבי? הוכח את תשובתך.
- יהיו R ו- S יחסי שקילות בקבוצה $\{a,b\}^*$. נגדיר יחס RS :
 $xRSy$ אם z קיימת מילה z מעל $\{a,b\}$ שעבורה xRz וגם zSy .
האם RS הוא יחס שקילות? הוכח את תשובתך.

שאלה 5 (20%)

- נתון הא"ב $\Sigma = \{ (,) \}$.
- מילה w מעל Σ , שאינה ריקה, נקראת מאוזנת אם ורק אם:
- מספר ה- $($ ב- w שווה למספר ה- $)$ ב- w .
 - בכל רישא של w מספר ה- $($ הוא לפחות כמספר ה- $)$.
- נגדיר כעת שפה L :
- $() \in L$.
 - אם $w \in L$ אזי גם $(w) \in L$.
 - אם $w_1, w_2 \in L$ אזי גם $w_1 w_2 \in L$.
 - L היא השפה המינימלית המקיימת את א, ב ו-ג.
- הסבר: זו הגדרה אינדוקטיבית של השפה L . כבסיס, המילה $()$ נמצאת בשפה. לכן בעזרת ב גם $(())$ בשפה, ובעזרת ג גם $(())$ בשפה.
- פעולות ב, ג מביאות למילים בשפה אם כ- w, w_1, w_2 נבחר מילים שהן בשפה.
- Σ^* מקיימת את א, ב ו-ג, אך היא אינה מקיימת את ד. דרישת המינימליות שב-ד "מרשה" להכניס לשפה L . רק מילים שנבנות מהבסיס $()$ על-ידי ב ו-ג.
- הוכח:** תהי w מילה לא ריקה מעל $\Sigma = \{ (,) \}$. אם $w \in L$ אז w מאוזנת.
(להשכלה כללית: $w \in L$ אם w מסתיימת ב- $)$ מאוזנת.)
- הדרכה:** ההוכחה תיעשה באינדוקציה על אורך w .
- בסיס האינדוקציה: מילה באורך 2 השייכת ל- L מאוזנת (למה?).
- צעד האינדוקציה: יש להראות שאם הטענה נכונה עבור כל מילה באורך קטן מ- n אזי היא נכונה למילים באורך n .
- תן דעתך: מדוע במקרה זה יש צורך בהנחת נכונות על אורך כלשהו הקטן מ- n ולא מספיקה ההנחה על אורך $n-1$ (או $n-2$)?

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 2

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: 2013 מועד אחרון להגשה: 29.3.2013

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

בחלק מהשאלות תתבקש לבנות אוטומט. במקרה שהפתרון מורכב, יש לצרף הסבר מילולי על דרך הבנייה ועל נכונות התשובה. **תמיד רצוי להציג אוטומט פשוט וקומפקטי.**

שאלה 1 (20%)

בנה אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים המקבלים את השפות הבאות מעל $\Sigma = \{0,1,2\}$:

א. כל המילים שאין בהן תת-מילה 101 או שהן מסתיימות ב-01.

ב. כל המילים שבהן אחרי כל מופע של 2 (אם יש) מופיע מייד רצף של שתי אותיות זהות, שאין בהן אף תת-מילה 21 ואף תת-מילה 02.

שאלה 2 (10%)

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את השפה הבאה שמעל $\Sigma = \{0,1,2,+,-\}$:

כל מילה בשפה מייצגת תרגיל חיבור של שני מספרים בבסיס 3 מהצורה $x+y$, או תרגיל

חיסור של שני מספרים בבסיס 3 מהצורה $x-y$, כאשר x ו- y מקיימים:

כל אחד מהם בין 10 בבסיס 3 לבין 22 בבסיס 3 (כולל 10 ו-22).

מותרים 0-ים מובילים (000021) למשל יכול להיות y .

תוצאת התרגיל היא מספר אי-זוגי.

דוגמאות למילים בשפה: $11+11$, $11+0010$ ו- $000011-0022$.

הערה: השתדל שלא יהיו באוטומט יותר מ-10 מצבים.

שאלה 3 (30%)

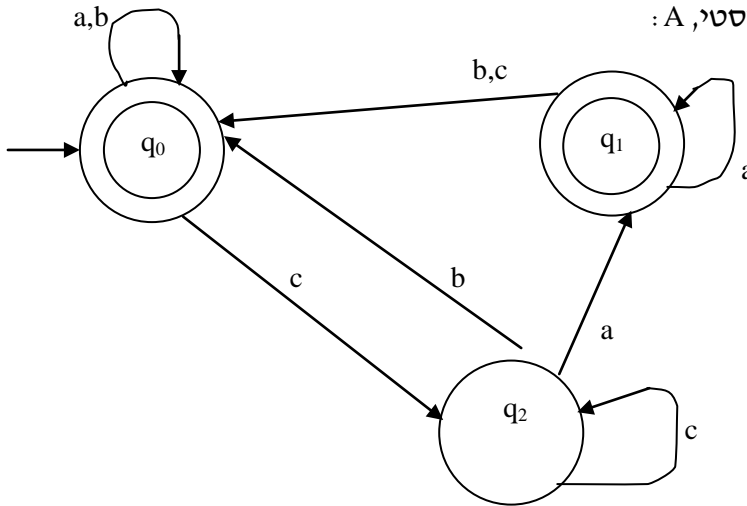
L_1 ו- L_2 הן שפות שאינן רגולריות. נגדיר:

א. $L = L_1 - L_2$. ב. $G = L_1 \cap L_2$. ג. $H = L_1 \cup L_2$

לגבי כל אחת מהשפות שהגדרנו - אם היא בהכרח רגולרית - הוכח; אם היא בהכרח אינה רגולרית - הוכח; ואם היא לעתים רגולרית ולעתים לא, תן דוגמא לכל מקרה (הצג דוגמא אחת של L_1 ו- L_2 שעבורה מתקבלת שפה רגולרית, ודוגמא אחרת של L_1 ו- L_2 שעבורה מתקבלת שפה שאינה רגולרית).

שאלה 4 (21%)

לפניך אוטומט סופי דטרמיניסטי, A:



בנה באמצעותו אוטומטים סופיים דטרמיניסטיים, A_1, A_2 , ו- A_3 המקבלים את השפות הבאות:

א. $L(A_1) = \{a, b, c\}^* - L(A)$

ב. $L(A_2) = \{a, b, c, d\}^* - L(A)$

ג. $L(A_3) = \{ w \in L(A) \mid |w|=1 \}$

הצע בכל מקרה מינימום שינויים שיש לערוך באוטומט A כדי לקבל את השפה המבוקשת.

שאלה 5 (19%)

נתון אוטומט סופי דטרמיניסטי, A. בנה באמצעותו אוטומט סופי דטרמיניסטי, B, כך ש- $L(B) = L(A) - \{aa\}$. הערה: עליך להגדיר את B במדויק.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: 2013 מועד אחרון להגשה: 12.4.2013

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערות:

1. בחלק מהשאלות תתבקש לבנות אוטומט סופי או לרשום ביטוי רגולרי. צרף לפתרון הסבר מילולי המבהיר את דרך מחשבתך ומנמק את נכונות הפתרון.
2. השם "אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי" מתייחס הן לאוטומט כזה עם מסעי- ϵ , הן לאוטומט כזה בלי מסעי- ϵ .
3. אוטומט סופי דטרמיניסטי הוא מקרה פרטי של אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי. לפיכך כשהנך מתבקש לבנות אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מותר שהאוטומט כן יהיה דטרמיניסטי, ואולם, רצוי שהאוטומט יהיה פשוט ככל האפשר ולהשגת מטרה זו, במקרים רבים, האי-דטרמיניזם עוזר.
4. מותר לסמן בקיצור את השפה שמציין ביטוי רגולרי r על-ידי r עצמו - אין צורך בסימון המלא $L[r]$.

שאלה 1 (15%)

בנה אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי המקבל את

$$L = \{ w \in \{a, b, c\}^* \mid \begin{array}{l} w = aw_1aw_2a \dots aw_n a \\ n \geq 3 \\ w_i \in (b+c)^* : n-1 \text{ בין } i \text{ ו-} n \\ \text{קיים } i \text{ בין } 2 \text{ ו-} n-1 \text{ המקיים } w_i \in b^+ \end{array} \}$$

שאלה 2 (18%)

אוטומט עם שני קלטים הוא אוטומט דומה לאוטומט סופי, אלא שהוא מיועד לקבל זוגות של מילים מעל א"ב Σ .

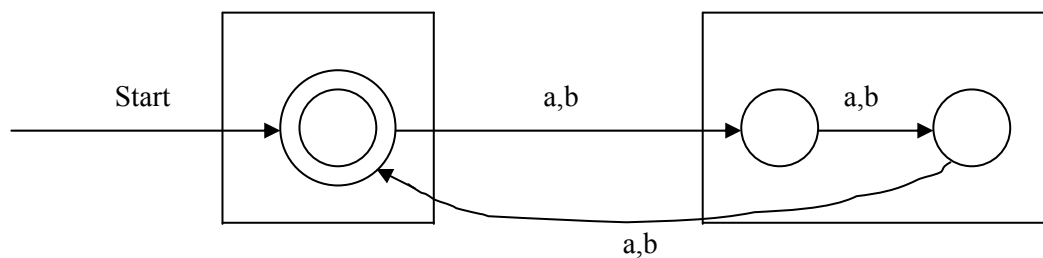
את זוג מילות הקלט מקבל האוטומט משני מקורות שונים. לאוטומט שתי קבוצות זרות של מצבים. כשנמצא האוטומט במצב של הקבוצה הראשונה הוא מקבל קלט מהמקור הראשון, וכשהוא נמצא במצב של הקבוצה השנייה הוא מקבל קלט מהמקור השני. לאחר קריאת אות קלט עובר האוטומט למצב כלשהו בקבוצה כלשהי.

המצב ההתחלתי של האוטומט נמצא בקבוצה הראשונה. **מצבים מקבלים** של האוטומט יכולים להמצא בכל אחת משתי הקבוצות.

השפה שאוטומט זה **מקבל**: כל זוגות המילים (w,x) שבסיום קריאת שתיהן נמצא האוטומט במצב מקבל.

דוגמא

האוטומט שבאיור הבא מקבל את כל זוגות המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ שבהן אורך המילה השנייה (זו מהמקור השני) כפול מאורך המילה הראשונה (זו מהמקור הראשון):



בנה אוטומט עם שני קלטים **בלי מסעי- ϵ** המקבל את $\{a^n b b^m, a a^k b^l \mid 0 \leq k, l, m, n; l \leq 2n\}$.

שאלה 3 (25%)

לפניך 2 זוגות של ביטויים רגולריים. לגבי כל זוג קבע אם הביטויים מציינים אותה שפה. אם התשובה חיובית הוכח זאת באינדוקציה, ולא - נמק בקצרה את קביעתך.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^* \\ (a^* b a^*)^+ + a^* + b^+ a^* \end{array} \right. \quad \text{א.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab^+ + (ba^+ b)^* + (b^+ a)^* \\ (a^+ + (abb^+ a)^* + b^* \end{array} \right. \quad \text{ב.}$$

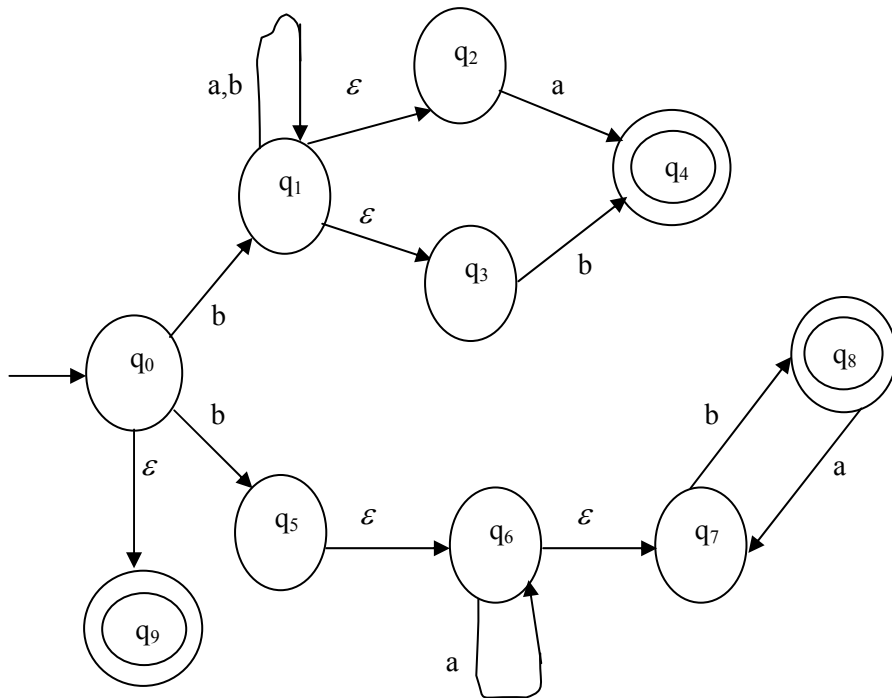
שאלה 4 (25%)

א. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{0, 1\}$ שיש בהן לפחות אות 0 אחת ושני 1.011.

ב. רשום ביטוי רגולרי המציין את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שיש בהן תת-מילה aaa ואין בהן תת-מילה bab.

שאלה 5 (17%)

הראה פורמלית כבספר איך מסלקים מסעי- ϵ מהאוטומט הבא, ואז עבור ממנו לדטרמיניסטי.



מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 26.4.2013

סמסטר: 2013ב

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערה: אחת הדרכים להוכיח ששפה היא רגולרית, היא בניית אוטומט (או הצגת ביטוי רגולרי). במקרה שבחרת בדרך זו אינך נדרש להוכיח שאכן השפה שהאוטומט מקבל (או השפה שהביטוי יוצר) שווה לשפה המבוקשת. ואולם, הגדר את האוטומט במדויק, באופן פורמלי, וכן הסבר מדוע הבנייה מתאימה לשפה המבוקשת.

שאלה 1 (20%)

הוכח שהשפה הבאה, שמעל $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ אינה רגולרית:

$$L = \{a^i b^j c d^k \mid i \geq 0; k > j > 3\}$$

1. באמצעות למת הניפוח.

2. על-פי תכונות סגירות.

שאלה 2 (20%)

נתון אוטומט סופי דטרמיניסטי A המקבל שפה מעל הא"ב $\{a, b, c\}$. תהי L השפה המתקבלת ע"י מחיקה של כל האותיות c במילים של $L(A)$. הצע אלגוריתם המכריע האם L היא שפה סופית.

שאלה 3 (20%)

משפט: אם L רגולרית אז $\widehat{L} = \{w \in \Sigma^* \mid ww^R \in L\}$ רגולרית.

הנה הצעת הוכחה לכך:

נגדיר $L_1 = \{w^R \in \Sigma^* \mid ww^R \in L\}$. מסגירות לחלוקה מימין גם $L / L_1 = \widehat{L}$ רגולרית מש"ל

האם ההוכחה נכונה או שגויה? נמק היטב!

שאלה 4 (20%)

v תקרא **רישא ממש** של w אם w קיימת מילה לא ריקה x שעבורה $w=vx$.

נגדיר פעולת Min על שפות: $\{ \text{לכל } v \text{ שהיא רישא ממש של } w, w \notin L \}$

הוכח: L רגולרית $\Leftrightarrow \text{Min}(L)$ רגולרית.

שאלה 5 (20%)

תהי L שפה רגולרית מעל Σ .

הוכח ש $\hat{L} = \{a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n \mid \forall i a_i \in \Sigma \text{ and } a_1 a_2 \dots a_n \in L\}$ היא שפה רגולרית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 10.5.2013

סמסטר: 2013ב

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (24%)

רשום את מחלקות השקילות של היחס R_L עבור כל אחת מהשפות הבאות.
אם השפה רגולרית רשום כל מחלקה באמצעות ביטוי רגולרי, ולא בכתב קבוצות.

א. $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, מעל $L = \{w \in \Sigma^* \mid 200 \leq |w| \leq 201\}$

ב. $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, מעל $L = \Sigma^* - (\{\epsilon, 2\} \cup \{102^i \mid i \geq 1\})$

שאלה 2 (13%)

L היא שפה מעל $\{a, b, c\}$ שעבורה מחלקות השקילות של R_L הן

$\{w \mid \#_a(w) \text{ is even and } \#_b(w) \geq 1\}$

$\{w \mid \#_a(w) \text{ is odd and } \#_b(w) \geq 1\}$

$\{w \mid \#_a(w) \text{ is odd and } \#_b(w) < 1\}$

$\{w \mid \#_a(w) \text{ is even and } \#_b(w) < 1\}$

וכן $abc \in L$ ו- $aa, aaa, aaaabbbb \notin L$. הצג אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את L .

שאלה 3 (26%)

הוכח באמצעות משפט נרוד שהשפות הבאות אינן רגולריות:

א. $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) < \#_c(w)\}$

ב. $L = \{a^i b^j c a^m b^n \mid 1 \leq i, j, n; j < 2m\}$

שאלה 4 (20%)

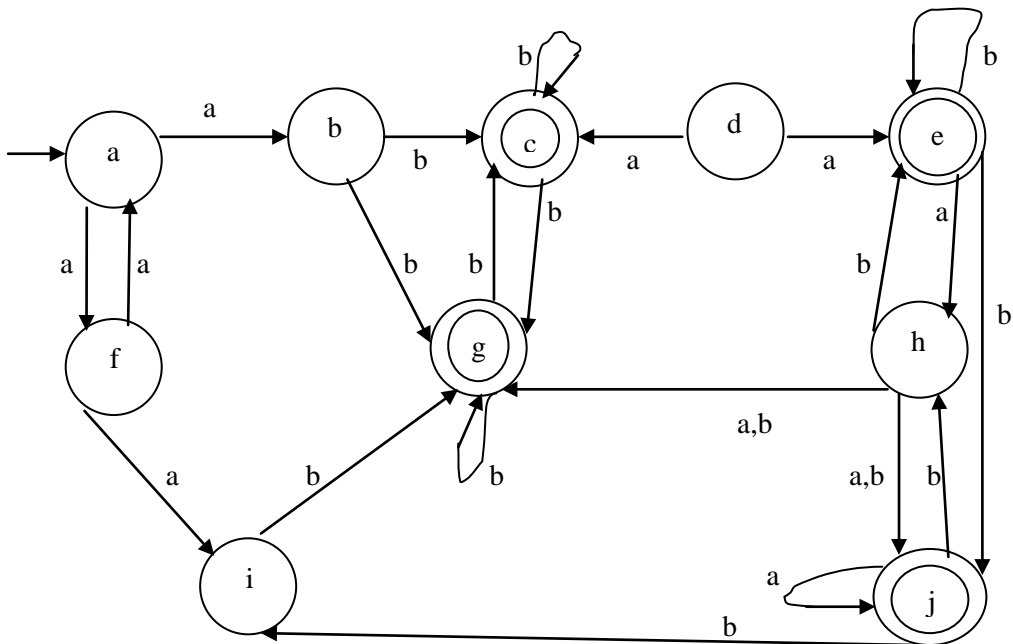
יהי Σ אי"ב כלשהו. נגדיר פונקציה $g: \Sigma^* \rightarrow 2^{\Sigma^*}$ באופן הבא: לכל מילה w באורך זוגי
 $w = w_1 \sigma w_2$ - כש- $\sigma \in \Sigma$ ואורכי w_1 ו- w_2 שווים $g(w) = \{w\}$
 שווים $g(w) = \{w_1 \sigma^i w_2 \mid i \geq 1\}$.

ועבור שפה L מעל האי"ב Σ נגדיר: $g(L) = \bigcup_{w \in L} g(w)$

מצא שפה רגולרית L שעבורה $g(L)$ אינה רגולרית. הסבר את תשובתך.

שאלה 5 (17%)

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי קשיר ומצומצם השקול לאוטומט הסופי הבא:



מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 4

מועד אחרון להגשה: 17.5.2013

סמסטר: 2013ב

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

הערה: כשהנך מתבקש להציג דקדוק מותר לך להשתמש בכללים מהצורה $A \rightarrow \varepsilon$ גם ל- $A \neq S$.

שאלה 1 (25%)

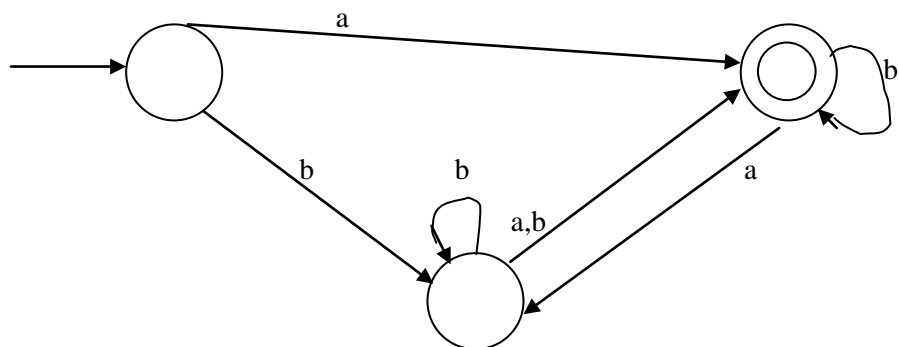
1. בנה אוטומט סופי המקבל את השפה שיוצר הדקדוק שכללי הגזירה שלו הם:

$$S \rightarrow 1A | 1B | 1 | \varepsilon$$

$$A \rightarrow 111B | 111$$

$$B \rightarrow 0B | 000S$$

2. הצג דקדוק לינארי ימני היוצר את השפה שמקבל האוטומט הסופי הבא:



שאלה 2 (25%)

הצג דקדוק חופשי-הקשר היוצר את השפה $\{a^i b^j \mid i, j \geq 0; i > j; i \neq 2j\}$

שאלה 3 (25%)

בדקדוק ליניארי כל הכללים הם מהצורה $A \rightarrow \varepsilon$ או $A \rightarrow b$, $A \rightarrow Bb$, $A \rightarrow bB$ ($b \in T$; $A, B \in V$).

הגדרה זו שונה מהגדרה 6.8 המובאת בספר הקורס, אך היא מתאימה יותר לפתרון השאלה.

שפה תקרא ליניארית אם"ם קיים דקדוק ליניארי שיוצר אותה.

הוכח את למת הניפוח הבאה למשפחת השפות הליניאריות:

אם L היא שפה ליניארית אז קיים קבוע $0 < n$, כך שלכל מילה $z \in L$ שאורכה $n < n$ יש פירוק מהצורה $z = uvwxy$ המקיים:

1. $|uvxy| \leq n$

2. $|vx| \geq 1$

3. לכל $0 \leq i$, $uv^iwx^iy \in L$

שים לב:

כמו שבלמה מיחידה 4 מצאנו למילה מספיק ארוכה מצב שבו נמצאים פעמיים, אפשר למצוא כאן משתנה שנמצא פעמיים במסלול של עץ הגזירה של המילה.
כ- n תוכל לבחור את מספר המשתנים של הדקדוק.

שאלה 4 (25%)

1. הוכח באמצעות הלמה משאלה 3 שהשפה הבאה אינה ליניארית:

$$L = \{a^k b^k c^l d^{m-l} e^m \mid 1 \leq k; 1 \leq l \leq m\}$$

2. האם שפה זו חופשית-הקשר? הסבר בקצרה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידה 7 וסעיפים 8.1, 8.2

מספר השאלות: 5 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2013 מועד אחרון להגשה: 31.5.2013

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדייקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

להזכירך: הבניות צריכות להיות פשוטות ובהירות, ולכן ברור שכשהנך מתבקש להציג דקדוק או אוטומט לשפה מסויימת, הכוונה היא שתבנה זאת ישירות, ולא תעבור מדקדוק לאוטומט או להפך...
הערה: קל יותר לתכנן אוטומט מחסנית באיור ולא כפונקציית דלתא - ראה את החוקים באתר הקורס.

שאלה 1 (15%)

בדקדוק חופשי-הקשר:

$$S \rightarrow 0A11 \mid 0B1 \mid 011$$

$$A \rightarrow S \mid C$$

$$B \rightarrow S \mid A$$

$$C \rightarrow C1 \mid 2$$

הצג דקדוק שקול בצורה הנורמלית של חומסקי.

שאלה 2 (21%)

הצג דקדוק חופשי-הקשר היוצר את השפה $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \geq 1 \text{ and } i + l = j + k\}$.

שאלה 3 (21%)

בנה אוטומט-מחסנית המקבל על-ידי הגעה למצב מקבל את השפה

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) \neq 2 \cdot \#_a(w)\}$$

שאלה 4 (22%)

בנה אוטומט-מחסנית המקבל את השפה:

$$L = \{t_1 W_1 \$ t_2 W_2 \$ \dots t_n W_n \$ \mid 1 \leq n \ ;$$

$$W_i \in \{x, y\}^+ \text{ ו- } t_i \in \{x, y\} \ ;$$

קיים i שעבורו מתקיים $i \leq |W_i|$ וגם לפחות אחד משני הבאים:

$(t_1 \dots t_i)^R$ האותיות הראשונות שלו הן מילה השונה מ-
או

$$\{ |W_i| = n \}$$

שאלה 5 (21%)

נתון דקדוק חופשי-הקשר $G=(V,T,P,S)$ ללא כללי- ϵ . הצג דקדוק חופשי-הקשר G' שיוצר כל מילה ששייכת ל- $L(G)$ כשהיא בלי האות האחרונה (הכי ימנית) שלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 18

הקורס: 20440 - אוטומטים ושפות פורמליות

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8-9

משקל המטלה: 3 נקודות

מספר השאלות: 5

מועד אחרון להגשה: 14.6.2013

סמסטר: 2013ב

י.ק.

אנא שים לב:

מלא בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתק את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

ההערה המופיעה בתחילת ממ"ן 14 תקפה גם כאן, לגבי שפות חופשיות-הקשר ושפות לינאריות (עם דקדוקים או אוטומטי-מחסנית).

שאלה 1 (14%)

הוכח שהשפה $L = \{a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3} \mid k_2 > k_3 \geq 1; k_1 > k_3\}$ אינה חופשית-הקשר.

שאלה 2 (24%)

א. הצג דקדוק חופשי-הקשר היוצר את השפה $L = \{ab^i cd^j \mid i \geq j \geq 0\}$.
ב. בהסתמך על חלק א בלבד, הוכח שהשפה הבאה חופשית-הקשר:

$$\tilde{L} = \{r^{n_1}sr^{n_2}s\dots r^{n_k}st^m \mid \begin{array}{l} 1 \leq k ; \\ 1 \leq m ; \\ \forall i(1 \leq i \leq k): n_i \geq 0 ; \\ \exists i(1 \leq i \leq k): m-1 \leq n_i \} \end{array}$$

שאלה 3 (20%)

משפט: L היא שפה מעל $\Sigma = \{a\}$ המקיימת את למת הניפוח לשפות חופשיות-הקשר $L \Leftarrow$ מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולריות.

הוכח את המשפט הזה באופן ישיר כך: הראה שבהנחה שלשפה L מתקיימים תנאי למת הניפוח הראשונה, אזי קיים n כך שלכל מילה ב- L שאורכה לפחות n , קיים פירוק שמקיים את התנאים (1)-(3) שבלמת הניפוח השניה.

הנחייה לפתרון: חשוב איך באמצעות פירוק $z=uvwxy$ תוכל להגדיר פירוק $z=u^i v^j w^k$ שמקיים את תנאי הלמה השניה.

רמז: מעל א"ב $\Sigma = \{a\}$ לכל שתי מילים w_1 ו- w_2 מתקיים $w_1 w_2 = w_2 w_1$.

שאלה 4 (21%)

נגדיר את CO-CFL כמשפחת השפות שהשפות המשלימות שלהן הן חופשיות-הקשר. הוכח שמשפחת שפות זאת סגורה להיפוך; דהיינו הוכיחו: אם L שייכת ל-CO-CFL אז בהכרח L^R שייכת ל-CO-CFL.

שאלה 5 (21%)

הוכח שאם L היא שפה רגולרית מעל $\Sigma = \{a, b, c\}$, אז השפה הבאה חופשית-הקשר:

$$L_a = \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \mid n \text{ אי-זוגי } 3 \leq n \text{ והאות שבאמצע } \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \text{ היא } a\}$$

אם נחליף את ה- a שבאמצע באות אחרת (b או c) תתקבל מילה

} ששייכת ל- L