מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20212 – חשבון אינפיניטסימלי II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2011א **מועד אחרון להגשה:** 7.1.2011

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1 (15 נקודות)

קבע לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.
נמק את שיקוליך.

א. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}\,2^n}$.

ב. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos 2n}{\ln(n^n+n^2)}+1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

שאלה 2 (10 נקודות)

תהי (u_n) סדרה מתכנסת, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u<0$, ויהי a מספר חיובי.

הוכח כי הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^{u_1+u_2+\cdots+u_n}$ מתכנס אם ורק אם $a>1$.

שאלה 3 (10 נקודות)

תהי (a_n) סדרה שכל איבריה שונים מאפס ו- $a_n\to a\neq 0$.

הוכח כי הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ מתכנס בהחלט אם ורק אם הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ מתכנס בהחלט.

שאלה 4 (30 נקודות)

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. קיים טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)$ מתכנס.

ב. לכל $0 < a < 1$ מתקיים: $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}$.

ג. יהי $a_n > 0$ לכל n, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + a_n$ מתכנס.

ד. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ מתכנס אז גם הסדרה (a_n) מתכנסת.

ה. אם (a_n) סדרה אפסה אז יש לה תת סדרה (a_{n_k}) כך שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ מתכנס בהחלט.

שאלה 5 (20 נקודות)

נניח כי שני הטורים הבאים, המתקבלים מהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ על-ידי הכנסת סוגריים, מתכנסים:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots$ (כלומר, $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ לכל n)

ו- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots$ (כלומר, $c_1 = a_1$, $c_{n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n).

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $a_n \to 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = S$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וסכומו הוא S.

ג. התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת מהנתון ללא תנאים נוספים.

שאלה 6 (15 נקודות)

הוכח כי קיימת פונקציה $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ חד-חד-ערכית ועל כך ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{f(n)} \ln \frac{f(n)+1}{f(n)} = \ln 2011$$

(אין צורך לחפש את f).