**1** כיוון אחד של ההכלה נובע ישירות מהגדרת האיחוד כי $B \subseteq A \cup B$. לכיוון השני נניח ש-$x \in A \cup B$, אז $x \in A$ (או $x \in B$) ולכן מהנתון נקבל ש-$x \in A \cap B$ (כי $A = A \cap B$) כלומר $x \in B$ וסיימנו.

**2**

1. $L_5 - L_4 = \{a, ab, babbb\}$
2. $L_5^R = \{a, ba, aaabaaa, bbbab, bbab\}$
3. $L_4L_6 = \{aa, aaabaaa, b, bbb, babb, babbbb, aabb, aaabaaabb, bbbbb, babbbbbb\}$
4. $L_1L_3 \cup L_2L_3 = L_3 \cup \varnothing = L_3$

**3**

1. נגדיר $\Sigma = \{0,1\}, L_1 = \{0\}, L_2 = \{1\}$. אז $0 \in \{0\}^*\{1\}^*$ אבל $0 \notin \{01\}^*$.
2. נגדיר $\Sigma = \{1,2,3\}, L_1 = \{1\}, L_2 = \{2\}, L_3 = \{3\}$. אז $(L_2 \cap L_3)L_1^+ = L_1^+$, ו-$L_2L_1^+ \cap L_3L_1^+ = \{21, 211, 2111, \dots\} \cap \{31, 311, 3111, \dots\}$.
3. יהי $x \in L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$. אם $x \in L_2$ אז $x \in L_1 \cap L_2$, אחרת אם $x \in L_3$ אז $x \in L_1 \cap L_3$, כלומר $x \in (L_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_3)$.

   נניח ש-$x \in (L_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_3)$. אז $x \in L_1 \cap L_2$ או $x \in L_1 \cap L_3$ כלומר בשני המקרים $x \in L_1$. במקרה הראשון $x \in L_2$ ולכן $x \in L_2 \cup L_3$ ובסה"כ $x \in L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$. המקרה השני מוכח בצורה דומה לראשון.
4. $w \in \overline{L}^R \iff w^R \in \overline{L} \iff w^R \notin L \iff w^{R^R} = w \notin L^R \iff w \in \overline{L^R}$.

**4 א** ראשית נשים לב שאם $y$ סיפא של $x$ אז שתיהן מסתיימות באותה אות. נוכיח זאת: יהיו $x = x_1 \cdots x_n, y = y_1 \cdots y_m$ מילים בשפה. אם $y$ סיפא של $x$ אז קיימת מילה $r$ כך ש-$x = ry$ או $x_1 \cdots x_n = ry_1 \cdots y_m$ ולכן $x_n = y_m$.

כלומר מספיק שנדרוש ביחס $R$ ששתי המילים יסתיימו באותה אות. בנוסף ל-$x, y$ שהוגדרו לעיל, נגדיר $z = z_1 \cdots z_k$. אם $xRy$ ו-$yRz$ אז $x_n = y_m$ ו-$y_m = z_k$ ולכן $x_n = z_k$, כלומר המילים $x, z$ מסתיימות באותה אות ומתקיים $xRz$ והיחס טרנזיטיבי.

**4 ב** $RS$ אינו יחס שקילות. נראה שקיימים $R, S, x, y$ כך ש-$xRSy$ אבל $yRSx$ לא מתקיים, כלומר $RS$ אינו סימטרי.

יהיו $x, y \in \{a,b\}^*, x \neq y$. נגדיר את $S$ כך ש-$xSx$ ולכל $x \neq w, z \in \{a,b\}^*$ מתקיים $wSz$ ו-$zSw$. $S$ סימטרי מעצם הגדרתו, רפלקסיבי אם ניקח $z = w$ וטרנזיטיבי כי אם $x \neq r \in \{a,b\}^*$ ומתקיים $wSr, rSz$ אז $wSz$. את $R$ נגדיר בצורה דומה רק נחליף תפקידים בין $x$ ל-$y$.

**טענה:** $RS$ לא סימטרי.

**הוכחה:** נניח ש-$xRSy$, אז מהגדרת $RS$ קיים $z_1$ כך ש-$xRz_1, z_1Sy$. נניח בשלילה שקיימת מילה $z_2$ כך ש-$yRz_2$ וגם $z_2Sx$. מצד אחד, מהגדרת $R$ נקבל ש-$z_2 = y$ ומצד שני מהגדרת $S$ נקבל ש-$z_2 = x$ כלומר $x = y$ וזו סתירה להנחה שהם מילים שונות.

5 תהי $L \in w$ מילה באורך $n$. נוכיח באינדוקציה על $n$ ש-$w$ מאוזנת.

**בסיס האינדוקציה:** אם $n = 2$ אז מהגדרת $L$ מקבלים ש-$w = ()$ וברור ש-$()$ מאוזנת.

**צעד האינדוקציה:** נניח שלכל מילה באורך קטן מ-$n$ ב-$L$ הטענה נכונה. מאחר ו-$w \in L$ מתקיים אחד מהשניים: קיימת מילה $x \in L$ כך ש-$w = (x)$ או שקיימות $y, z \in L$ כך ש-$w = yz$.

במקרה הראשון $|x| = n - 2$ ולכן מהנחת האינדוקציה $x$ מאוזנת, מספר ה-) שווה למספר ה-( כי הוספנו אחד מכל אחד למילה מאוזנת ומספר ה-) בכל רישא של $w$ גדול שווה למספר ה-( כי הוספנו לה אחד ולא שינינו את מספר ה-(.

במקרה השני האורכים של $y$ ו-$z$ גם כן קטנים מ-$n$ ולכן הן מאוזנות. קל לראות שהדרישה הראשונה למילה מאוזנת מתקיימת (כי אם בשתי המילים מספר שווה של סוגריים אז גם בשרשור שלהם). תהי $r$ רישא של $w$. אם $k \leq n, r = r_1 \cdots r_k$ רישא של $y$ אז הדרישה השנייה למילה מאוזנת מתקיימת כי $y$ מאוזנת, אחרת קיים אינדקס $i$ כך ש-$y = r_1 \cdots r_i$ ו-$r_{i+1} \cdots r_k$ רישא של $z$. מספר ה-) קטן ממספר ה-( ב-$y$ (שוב כי $y$ מאוזנת) ומאחר ו-$z$ מאוזנת ו-$r_{i+1} \cdots r_k$ רישא שלה קיבלנו ש-$w$ מקיימת את הדרישה השנייה למילה מאוזנת.

לסיכום קיבלנו שבשני המקרים $w$ מאוזנת.

לא מספיקה הנחה על $n - 1$ או $n - 2$ כי כמו שאפשר ללמוד מההוכחה לעיל השתמשנו בהנחת האינדוקציה גם עבור מילים שאורכן קטן מ-$n$ ולא רק $n - 1$ או $n - 2$.