1 נניח בשלילה ש-L חופשית הקשר.

יהי n הקבוע מלמת הניפוח לשפות חופשיות הקשר ותהי $z = a^n b^n c^{n-1} \in L$. לפי למת הניפוח את z ניתן לפרק לצורה $z = uvwxy$ כך ש:

$$|vx| \geq 1, |vwx| \leq n, z_i = uv^i wx^i y \in L$$

ייתכנו המקרים הבאים:

1. $vx = a^t$. נבחר $i = 0$ ונקבל ש-$k_1 = \#_a(z_0) = n - \underset{\substack{\uparrow \\ t>0}}{t} \leq n - 1 = \#_c(z_0) = k_3$ בסתירה לכך ש-$k_1 > k_3$ בהגדרת L.
2. $vx = b^t$. נבחר $i = 0$ ונקבל בדומה ל-1 ש-$\#_b(z_0) = k_2 \leq k_3 = \#_c(z_0)$ בסתירה לכך ש-$k_2 > k_3$.
3. $vx = c^t$. נבחר $i = 2$ ונקבל ש-$\#_a(z_2) = n \leq n - 1 + t = \#_c(z_2)$ בסתירה לכך ש-$k_1 > k_3$.
4. $vx = a^t b^s, t, s > 0$. נבחר $i = 0$ ונקבל ש-$\#_a(z_0) = n - t \leq n - 1 = \#_c(z_0)$ בסתירה לכך ש-$k_1 > k_3$.
5. $vx = b^t c^s, t, s > 0$. נבחר $i = 2$ ונקבל ש-$\#_a(z_2) = n \leq n - 1 + s = \#_c(z_2)$ בסתירה לכך ש-$k_1 > k_3$.

בכל מקרה, לא ייתכן ש-$z \in L$ ולכן L אינה חופשית הקשר.

2 א

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aX \\ X &\longrightarrow bXd \mid bX \mid c \end{aligned}$$

2 ב נגדיר את ההצבה $f : \{a, b, c, d\} \to P(\{r, s, t\}^*)$ כך ש:

$$\begin{aligned} f(a) &= (r^*s)^* \\ f(b) &= r \\ f(c) &= s(r^*s)^* \\ f(d) &= t \end{aligned}$$

נסביר מה f תעשה ל-L: התנאי $n_i \geq m - 1$ עבור i כלשהו מתקיים בגלל היחס בין ה-b-ים ל-d-ים ב-L (ה-b העודף יטופל ע"י שרשור t ל-$f(L)$). הטיפול ברצפים של r^*s לפני ואחרי n_i מטופל ע"י $f(a)$ ו-$f(c)$.

מסגירות שפות ח"ה להצבה נקבל ש-$f(L)$ ח"ה. כדי לקבל את $\widetilde{L}$ כל שעלינו לעשות הוא לשרשר t מימין ל-$f(L)$ ומאחר ויש סגירות לשרשור נקבל ש-$\widetilde{L} = f(L) \cdot \{t\}$ ח"ה.

3 אם L מקיימת את למת הניפוח לשפות ח"ה אז קיים n כך שלכל מילה $z \in L, |z| \geq n$ קיים פירוק $z = uvwxy$ המקיים:

1. $|vx| \geq 1$.
2. $|vwx| \leq n$.

3. $z_i = uv^iwx^iy \in L$.

מאחר ו-L מעל $\Sigma = \{a\}$ נוכל לסדר מחדש את הפירוק של z כך $z = \overbrace{w}^{u'}\overbrace{vx}^{v'}\overbrace{uy}^{w'}$.
מתקיים:

1. $z' = u'v'w' \in L$.
2. $|v'| = |vx| \geq 1$.
3. $|u'v'| = |wvx| \leq n$.
4. $z'_i = u'{v'}^iw' = w(vx)^iuy = uv^iwx^iy = z_i \in L$.

לסיכום, הראינו שקיים קבוע (אותו אחד) ופירוק לכל מילה שאורכה לפחות n כך שמתקיימים תנאי למת הניפוח לשפות רגולריות.

4

$$L \in \text{CO-CFL} \implies \overline{L} \text{ ח"ה} \overset{1}{\implies} (\overline{L})^R \text{ ח"ה} \overset{2}{\implies} \overline{L^R} \text{ ח"ה} \implies L^R \in \text{CO-CFL}$$

1. השפות החופשיות הקשר סגורות להיפוך.
2. לכל שפה L מתקיים $\overline{L}^R = \overline{L^R}$:

$$w \in \overline{L}^R \iff w^R \in \overline{L} \iff w^R \notin L \iff {w^R}^R = w \notin L^R \iff w \in \overline{L^R}$$

5 נגדיר דקדוק $G = (\{S, A\}, \Sigma \cup \{x\}, P, S)$ שכלליו P יהיו:

$$S \longrightarrow ASA \mid x$$
$$A \longrightarrow a \mid b \mid c$$

קל לראות ש-$L(G)$ מקיימת את התנאי הראשון בהגדרת L_a כאשר החלפנו את a באמצע המילה ב-x.

תהי $f : \Sigma \to P((\Sigma \cup \{x\})^*)$ ההצבה הבאה:

$$f(\sigma) = \{\sigma, x\} \quad , \sigma \in \{b, c\}$$
$$f(a) = \{a\}$$

$f(L)$ רגולרית ובנויה מכל הצירופים של מילים ב-L כך ש-b, c הוחלפו ולא החולפו ב-x.
השפה $f(L) \cap (\Sigma^+ x \Sigma^+)$ היא כל אותם צירופים ממקודם שרק b או c בודד הוחלף.

$L' = f(L) \cap (\Sigma^+ x \Sigma^+)$ היא הצבה, שרשור וחיתוך של שפות רגולריות ולכן גם כן רגולרית.
השפות הח"ה סגורות לחיתוך עם שפות רגולריות ולכן $L(G) \cap L'$ ח"ה כאשר כל מילה בה היא מילה מ-L שהאות האמצעית שלה הייתה b או c (והוחלפה ב-x) ואורכה אי זוגי ≤ 3.

לבסוף נגדיר הומומורפיזם $h : \Sigma \cup \{x\} \to \Sigma^*$ כך ש-$h(\sigma) = \sigma, \sigma \in \Sigma$ ו-$h(x) = a$. נקבל ש-$L_a = h(L(G) \cap L')$ חופשית הקשר, כנדרש.