

האוניברסיטה הפתוחה

20290

**אלגוריתמיקה -  
יסודות מדעי המחשב  
חוברת הקורס – קיץ 2013**

כתב: אייל משיח

יולי 2013 - סמסטר קיץ – תשע"ג

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

1	אל הסטודנט
2	1. לוח זמנים ופעילויות
3	2. תיאור המטלות
4	3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
5	ממ"ן 11
7	ממ"ן 12
9	ממ"ן 13
11	ממ"ן 14
13	ממ"ן 15



## אל הסטודנט,

אנו מברכים אותך עם הצטרפותך אל הלומדים בקורס "אלגוריתמיקה - יסודות מדעי המחשב".

הקורס בסמסטר קיץ נמשך 9 שבועות בלבד, ולכן חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. **בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לדחות את הגשת המטלות.**

ברצוננו להפנות תשומת לבך לשתי נקודות חשובות:

- במהלך הקורס יש להגיש תרגילי בית. מספיק להגיש שלושה מתוך חמשת הממ"נים שבחוברת, אך מומלץ להגיש את כולם. יש להקפיד על הגשת הממ"נים במועד.
  - הקורס "אלגוריתמיקה" הוא קורס מתוקשב. לקורס יש אתר-בית הכולל לוח הודעות, קבוצת דיון, מאגר משאבים והפניות לאתרים אחרים ברשת. לתשומת לבך, אתר הקורס הוא ערוץ תקשורת "רשמית". יש להתייחס להודעות ועדכונים שיופיעו בלוח ההודעות שבאתר כאילו שנשלחו בדואר. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: <http://telem.openu.ac.il>.
- מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library).

צוות הקורס ישמח לעמוד לרשותך בכל שאלה שתתעורר.

ניתן לפנות אלי ביום ג', בשעות 11:00-13:00, בטלפון 09-7781233, או ב-e-mail.

כתובתי היא: [eyalma@openu.ac.il](mailto:eyalma@openu.ac.il).

פגישות יש לתאם מראש.

בברכה,

אייל משיח

מרכז הקורס

## 1. לוח זמנים ופעילויות (20290 / 2013ג)

תאריך אחרון למשלוח הממ"ן	מפגשי ההנחיה*	פרקי הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע הלימוד
	מפגש 1	פרקים 1-4	5.7.2013-2.7.2013	1
ממ"ן 11 12.7.2013	מפגש 2	פרק 5	12.7.2013-7.7.2013	2
	מפגש 3	פרק 6	19.7.2013-14.7.2013 (ג צום ט' באב)	3
ממ"ן 12 26.7.2013	מפגש 4	פרק 7	26.7.2013-21.7.2013	4
	מפגש 5	פרק 8	2.8.2013-28.7.2013	5
ממ"ן 13 9.8.2013	מפגש 6	פרק 9	9.8.2013-4.8.2013	6
ממ"ן 14 16.8.2013	מפגש 7	פרק 10	16.8.2013-11.8.2013	7
	מפגש 8	פרק 11	23.8.2013-18.8.2013	8
ממ"ן 15 2.9.2013		פרק 12	2.9.2013-25.8.2013	9

### מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## 2. תיאור המטלות

הממ"נים בקורס הם ממ"נים רגילים: כל מטלה מורכבת ממספר תרגילים "יבשים" שאינם דורשים הרצת תכניות במחשב. תרגילים אלו נועדו לבדוק את הבנתך בחומר הלימוד. את הפתרון למטלה כזו יש לכתוב בעט על דף נייר בכתב יד ברור ובצורה מסודרת. רצוי להשאיר שוליים רחבים להערות המנחה. (אפשר ורצוי, כמובן, להדפיס את הפתרון למטלה). אם השאלה בממ"ן אינה ברורה לך, ניתן להתקשר אל אחד מהמנחים (בשעת הייעוץ הטלפוני שלו) לצורך קבלת הסבר או לנסות להיעזר בקבוצת הדיון של הקורס. בטבלה שלהלן תמצא מהו חומר הלימוד הנדרש (לפי פרקי הספר) לפתרון כל אחת מהמטלות, ומשקל כל מטלה בחישוב הציון של הקורס.

**שים לב!**  
בעת כתיבת פתרון למטלה אין להסתמך על פרקי לימוד מתקדמים יותר מהפרקים בהם עוסקת המטלה.

מטלה	חומר הלימוד הנדרש לפתרון	משקל המטלה
ממ"ן 11	פרקים 1-4	6 נקודות
ממ"ן 12	פרקים 5-6	6 נקודות
ממ"ן 13	פרק 7	6 נקודות
ממ"ן 14	פרקים 8-9	6 נקודות
ממ"ן 15	פרקים 10-12	6 נקודות

ניתן לצבור עד 30 נקודות. חובה להגיש שלוש מטלות מתוך החמש.

**לתשומת לבכם!**

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו את ההקלה שלהלן:

אם הגשתם מטלות מעל למשקל המינימלי הנדרש בקורס, **המטלות** בציון הנמוך ביותר, שציוניהן נמוכים מציון הבחינה (**עד שתי מטלות**), לא יילקחו בחשבון בעת שקלול הציון הסופי.

זאת בתנאי שמטלות אלה אינן חלק מדרישות החובה בקורס ושהמשקל הצבור של המטלות האחרות שהוגשו, מגיע למינימום הנדרש.

**זכרו!** ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

### 3. התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לקבל נקודות זכות בקורס זה עליך לעמוד בדרישות הבאות:

א. להגיש מטלות במשקל של 18 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון של 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי של 60 לפחות.

#### לתשומת לבכם:

מדיניות קורס זה היא לאשר הזנת ציון אפס במטלות שלא הוגשו כנדרש בקורס. סטודנטים אשר לא הגישו את מכסת המטלות המינימאלית לעמידה בדרישות הקורס ולקבלת זכאות להיבחן, ומבקשים שמטלות חסרות יוזנו בציון אפס, יפנו למוקד הפניות והמידע בטלפון 09-7782222 או **יעדכנו בעצמם** באתר שאילתא <http://www.openu.ac.il/sheilta>

**קורסים ← ציוני מטלות ובחינות ← הזנת ציון 0 למטלות רשות שלא הוגשו.**  
יש לקחת בחשבון כי מטלות אשר יוזן להן ציון אפס ישוקללו בחישוב הציון הסופי ובכך יורידו ציון זה ולא ניתן יהיה להמירן במטלות חלופיות במועד מאוחר יותר. על כן קיימת אפשרות שסטודנט אשר יעבור את הבחינה בהצלחה ייכשל בקורס (כשהמוצע המשוקלל של המטלות והבחינה יהיה נמוך מ-60).

**כלל זה איננו חל על מטלות חובה או על מטלות שנקבע עבורן ציון מינימום.**



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-4

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2013 מועד אחרון להגשה: 12.7.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

## שאלה 1 (15 נקודות)

פלינדרום הוא משפט שקריאתו מימין ומשמאל זהה.

כתבו אלגוריתם, הקורא מהקלט מחרוזת תווים (ללא רווחים) ובודק אם היא פלינדרום. מותר לאלגוריתם להשתמש במחסנית ובתור. אורכה של מחרוזת הקלט אינו ידוע מראש.

## שאלה 2 (15 נקודות)

אפשר לייצג ביטוי אריתמטי המורכב ממספרים טבעיים, האופרטור האונירי "-" וארבעת

האופרטורים הבינריים "+", "-", "x" ו-"/" באמצעות עץ בינרי באופן הבא:

מספר טבעי I מיוצג ע"י עלה המכיל את I.

הביטוי E – מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור האונירי "-" ובנו היחיד הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E.

הביטוי E·F (שבו הסימן "." מציין איזושהו אופרטור בינרי) מיוצג ע"י עץ, שהשורש שלו מכיל את האופרטור ".", בנו השמאלי הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי E ובנו הימני הוא השורש של תת-עץ המכיל את הביטוי F.

כתבו אלגוריתם רקורסיבי המקבל עץ בינרי המייצג ביטוי אריתמטי ומחשב את ערך הביטוי.

## שאלה 3 (20 נקודות)

א. הריצו את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת המסלול הקצר ביותר על הגרף שבעמוד 91 בספר הלימוד.

ב. הסבירו מדוע האלגוריתם של דייקסטרה אינו מתאים לגרף שיש בו קשתות שליליות, ותנו דוגמה לגרף בעל קשת שלילית שעבורו האלגוריתם יחזיר תשובה שגויה.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

נדון בגרסה של בעיית תרמיל הגב בשברים, שבה קיימים מספר סוגים של פריטים והקלט כולל את מספר הפריטים מכל סוג (כל הפריטים מאותו סוג הם זהים). כלומר, הקלט לבעיה מורכב מ:

1.  $N$  – מספר סוגי הפריטים
2.  $W$  – המשקל המקסימלי שאפשר לשאת בתרמיל
3. וקטור  $q$  המכיל את מספר הפריטים מהסוג  $i$ -ה לכל  $1 \leq i \leq N$
4. וקטור  $w$  המכיל את המשקל  $w_i$  של כל פריט מהסוג  $i$ -ה לכל  $1 \leq i \leq N$
5. וקטור  $v$  המכיל את השווי  $v_i$  של כל פריט מהסוג  $i$ -ה לכל  $1 \leq i \leq N$

א. תארו אלגוריתם לפתרון גרסה זו של הבעיה.

ב. פתרו את הבעיה עבור הקלט הבא:

$$N = 5, W = 70$$

$$q = [3, 1, 4, 3, 2]$$

$$w = [10, 20, 25, 8, 7]$$

$$v = [15, 42, 30, 16, 18]$$

**שאלה 5 (30 נקודות)**

מספר האפשרויות לבחור  $k$  איברים מתוך  $n$  (בלי חזרות) מסומן ע"י  $\binom{n}{k}$ .

א. כתבו נוסחה רקורסיבית לחישוב  $\binom{n}{k}$  והסבירו מדוע היא נכונה.

ב. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי לחישוב  $\binom{n}{k}$ .

הדרכה: השתמשו בטבלה בגודל  $(n+1) \times (k+1)$ .

ג. חשבו באמצעות האלגוריתם מסעיף ב' את  $\binom{7}{3}$ .

**שאלה 6 (שאלת בונוס)**

נתונה הפונקציה הבאה:

$$M(n) = \begin{cases} n-10 & \text{if } n > 100 \\ M(M(n+11)) & \text{if } n \leq 100 \end{cases}$$

מה תחזיר הפונקציה עבור  $n = 87$ ?

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 5-6

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 26.7.2013

סמסטר: ג2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

האלגוריתם הבא מקבל מחרוזת תווים באורך  $n$  הנמצאת במערך  $B$ , ובודק אם המחרוזת היא פלינדרום:

(1)  $i \leftarrow 1, P \leftarrow \text{True}$

(2) כל עוד  $P = \text{True}$  וגם  $i \leq n/2$  בצע:

(2.1) אם  $B[i] \neq B[n - i + 1]$  אז  $P \leftarrow \text{False}$

(2.2) אחרת  $i \leftarrow i + 1$

(3) החזר את  $P$ .

הוכיחו את נכונותו המלאה של האלגוריתם.

שאלה 2 (15 נקודות)

נתון מערך מספרים  $A$  בגודל  $n$ . מעוניינים לשנות את המערך, כך שהאיבר במקום ה- $i$  במערך יכיל את סכום איברי המערך המקורי עד לאינדקס  $i$ . למשל:

2	3	1	7	5
---	---	---	---	---

המערך המקורי:

2	5	6	13	18
---	---	---	----	----

המערך החדש:

א. כתבו אלגוריתם נאיבי הפותר את הבעיה בזמן  $O(n^2)$ .

ב. כתבו אלגוריתם הפותר את הבעיה בזמן  $O(n)$ .

ג. הסבירו מדוע האלגוריתם שכתבתם בסעיף ב' הוא נכון (אין צורך בהוכחת נכונות מלאה – מספיק לנסח את האיננוואריאנטה שמתקיימת לפני כל איטרציה של הלולאה).

**שאלה 3 (20 נקודות)**

- חיפוש טרנרי דומה לחיפוש בינרי, אך בכל שלב מחלקים את תחום החיפוש לשלושה חלקים.
- א. כתבו אלגוריתם רקורסיבי המבצע חיפוש טרנרי ברשימה ממוינת.
- ב. הוכיחו את נכונותו של האלגוריתם שכתבתם ונתחו את זמן ריצתו.

**שאלה 4 (20 נקודות)**

- נתונים בניין בן  $n$  קומות ושלושה כדורי זכוכית זהים. ידוע שאם נזרוק כדור זכוכית החל מקומה מסוימת ומעלה, הכדור יישבר. זריקת כדור מקומה נמוכה יותר לא תגרום לשבירתו. הבעיה היא למצוא את הקומה המינימלית שזריקת כדור ממנה תגרום לשבירתו. הפעולות המותרות לצורך פתרון הבעיה הן זריקת כדורים מקומות הבנין (ובדיקה אם הם נשברו). תארו אלגוריתם יעיל לפתרון הבעיה ונתחו את זמן הריצה שלו.

**שאלה 5 (30 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק'; סעיף ג' – 15 נק')**

- א. המערך הבא התקבל אחרי ביצוע שגרת החלוקה במיון-מהיר: [6, 1, 3, 7, 8, 12, 15, 10]. אילו מהאיברים של המערך היו יכולים לשמש כאיבר הציר בשגרת החלוקה? נמקו את תשובתכם.
- ב. נתונים שני מערכים בגודל  $n$ : מערך A הממוין בסדר עולה ומערך B הממוין בסדר יורד. כתבו אלגוריתם לינארי המוצא את כל האיברים המופיעים גם ב-A וגם ב-B.
- ג. בהינתן מערך המתקבל אחרי ביצוע שגרת החלוקה במיון-מהיר, תארו אלגוריתם למציאת כל האיברים שהיו יכולים לשמש כאיבר הציר בשגרת החלוקה.
- רמז: השתמשו באלגוריתם מסעיף ב'.

**שאלה 6 (שאלת בונוס)**

- בעמ' 138 בספר הלימוד מתוארת שגרה רקורסיבית למציאת מינימום ומקסימום ברשימת איברים באורך  $N$ . זמן הריצה של השגרה (עבור  $N$  שהוא חזקה של 2) נתון ע"י נוסחת הנסיגה הבאה:

$$C(2) = 1$$

$$C(N) = 2C(N/2) + 2$$

הוכיחו שפתרון הנוסחה הוא  $C(N) = 3N/2 - 2$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 9.8.2013

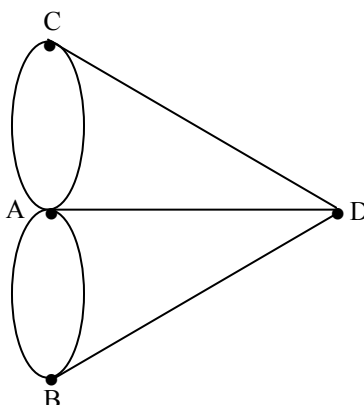
סמסטר: 2013ג

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

שאלה 1 (15 נקודות)

נתבונן בגרף הבא:



- א. הוכיחו שקיים בגרף מסלול המילטוני, אך לא קיים בו מסלול אוילרי.
- ב. מהו המספר המינימלי של קשתות שצריך להוסיף לגרף כדי שיהיה בו מסלול אוילרי? נמקו את תשובתכם.
- ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שצריך להסיר מהגרף כדי שלא יהיה בו מסלול המילטוני? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 (15 נקודות)

נדון בבעיה הבאה:

הקלט לבעיה: גרף  $G = (V, E)$  ותת-קבוצה  $U$  של  $V$

השאלה: האם קיים בגרף מסלול פשוט העובר בכל צמתי  $U$ ?

הוכיחו שהבעיה שלמה ב-NP.

### שאלה 3 (20 נקודות)

בכל אחד משני הסעיפים הבאים מתוארת בעיית הכרעה. עליכם לקבוע אם היא שייכת למחלקה P.

- אם הבעיה שייכת ל-P – הוכיחו זאת; אחרת, הסבירו מדוע לדעתכם הבעיה אינה שייכת ל-P.
- א. בהינתן קבוצה של  $n$  מספרים שלמים, האם קיים בה איבר ששווה לסכום כל יתר האיברים?
- ב. בהינתן קבוצה של  $n$  מספרים שלמים, האם קיימת תת-קבוצה (לא ריקה) שלה שסכום האיברים בה שווה לאפס?

### שאלה 4 (20 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית הספיקות:

הקלט לבעיה: פסוק בתחשיב הפסוקים

השאלה: האם קיימות לפסוק לפחות שתי השמות מספקות?

הוכיחו שגם גרסה זו של הבעיה היא NP-שלמה.

### שאלה 5 (30 נקודות)

**קבוצה בלתי תלויה** בגרף לא מכוון  $G = (V, E)$  היא תת-קבוצה  $V' \subseteq V$  של צמתים, כך שלכל שני צמתים  $u, v$  ב- $V'$  הקשת  $(u, v)$  אינה שייכת ל- $E$ . קבוצה בלתי תלויה בגרף לא מכוון נקראת **מקסימלית להכלה** אם היא אינה מוכלת באף קבוצה בלתי תלויה אחרת בגרף.

להלן נתון אלגוריתם למציאת קבוצה בלתי תלויה בגרף  $G$  בעל  $n$  צמתים:

$$(1) V' \leftarrow \{v_1\}$$

(2) עבור  $i \leftarrow 2$  עד  $n$  בצע:

(2.1) אם  $v_i$  אינו שכן של אף צומת ב- $V'$ , אז הוסף אותו ל- $V'$

(3) החזר את  $V'$ .

א. הראו שהקבוצה שמחזיר האלגוריתם היא קבוצה בלתי תלויה מקסימלית להכלה.

ב. **קבוצה שולטת** בגרף לא מכוון  $G = (V, E)$  היא תת-קבוצה  $V' \subseteq V$ , כך שלכל צומת  $u$  ב- $V$  מתקיים אחד מהשניים: או ש- $u \in V'$ , או שקיים צומת  $v$  בגרף כך ש- $v \in V'$  והקשת  $(v, u)$  שייכת ל- $E$  (כלומר, קבוצה שולטת היא קבוצת צמתים  $V'$ , שהאיחוד שלה עם כל השכנים שלה שווה ל- $V$ ). הוכיחו שהקבוצה שמחזיר האלגוריתם מסעיף א' היא קבוצה שולטת.

ג. נתון גרף קשיר  $G$ . הציעו דרך לחלק את צמתי  $G$  לשתי קבוצות שולטות  $V_1, V_2$  כך שיתקיים:  $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . (רמז: העזרו בסעיפים א' ו-ב').

### שאלה 6 (שאלת בונוס)

נניח שקיימת שגרה המסוגלת לבדוק בזמן פולינומי אם פסוק נתון בתחשיב הפסוקים הוא ספיק. הראו כיצד אפשר להשתמש בשגרה זו כדי **למצוא** השמה מספקת לפסוק נתון בזמן פולינומי.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 8-9

משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 16.8.2013

סמסטר: 2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

## שאלה 1 (15 נקודות)

נתונה בעיית הכרעה  $D$ , שקלטיה הם מספרים שלמים חיוביים. בידנו אלגוריתם  $A$  לפתרון הבעיה. ידוע שהאלגוריתם נכון חלקית לכל קלט חוקי. כמו-כן, בידנו הוכחה שהאלגוריתם עוצר על כל הקלטים הגדולים או שווים ל-1000, אך לא הצלחנו להרחיב את ההוכחה גם לקלטים הקטנים מ-1000. האם הבעיה  $D$  כריעה? הוכיחו את תשובתכם.

## שאלה 2 (15 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית נחש הדומינו במחצית המישור האינסופי:  
הקלט לבעיה: קבוצה סופית  $T$  של סוגי מרצפות (שונים זה מזה), שתי נקודות שונות  $V$  ו- $W$  במחצית העליונה של המישור האינסופי ומספר טבעי  $k$  ( $k \leq |T|$ )  
השאלה: האם ניתן להגיע מ- $V$  ל- $W$  באמצעות "נחש דומינו" המשתמש לכל היותר ב- $k$  סוגי מרצפות מתוך סוגי המרצפות שב- $T$ ?  
הוכיחו שגם גרסה זו של הבעיה היא בלתי כריעה.

## שאלה 3 (20 נקודות)

נתבונן בגרסה הבאה של בעיית התאמת המילים:  
הקלט לבעיה: שתי סדרות מילים  $X$  ו- $Y$  ואינדקס מסוים  $i$   
השאלה: האם קיימת התאמת מילים המכילה את המילים שבאינדקס  $i$  לפחות פעם אחת?  
הוכיחו שגם גרסה זו של הבעיה היא בלתי כריעה.

**שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק'; סעיף ג' – 5 נק')**

- הערה (comment) בשפת Free Pascal מורכבת מטקסט כלשהו המופיע בין סוגריים מסולסלים. למשל, המחרוזת הבאה היא הערת חוקית בשפת Free Pascal: {My program is a great one}.
- א. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה הערות חוקיות בשפת Free Pascal. הניחו שהערה חוקית חייבת להכיל לפחות תו אחד.
- ב. בשפת Free Pascal מותר לכתוב גם הערה מקוננת (כלומר, הערה בתוך הערה).
- ג. האם אפשר לדעתכם לבנות אוטומט סופי דטרמיניסטי שיזהה הערות בשפת Free Pascal בעלות רמת קינון כלשהי (לא חסומה)? נמקו את תשובתכם.

**שאלה 5 (30 נקודות: סעיף א' – 20 נק'; סעיף ב' – 10 נק')**

- בשאלה זו נדון בסימולציה של מכונת טיורינג באמצעות אוטומט סופי דטרמיניסטי עם שתי מחסניות. קונפיגורציה נתונה של מכונת טיורינג M תיוצג ע"י האוטומט A בדרך הבאה:
- המצב של M ותוכן התא שעליו מצביע הראש הקורא-כותב יהיו מיוצגים ע"י המצב של האוטומט A.
  - מחסנית אחת של האוטומט (המחסנית "השמאלית") תשמור את תוכן הסרט הנמצא משמאל לראש, כשהתו הימני ביותר בחלק זה של הסרט יהיה בראש המחסנית.
  - המחסנית השנייה של האוטומט (המחסנית "הימנית") תשמור את תוכן הסרט הנמצא מימין לראש, כשהתו השמאלי ביותר בחלק זה של הסרט יהיה בראש המחסנית.

למשל, עבור מכונה M שנמצאת במצב  $Q_1$  וסרט שנראה כך:



האוטומט A יהיה במצב  $(Q_1, e)$  ושתי המחסניות ייראו כך:



א. הסבירו כיצד האוטומט A יבצע סימולציה של:

1. צעד שמאלה של M.
2. צעד ימינה של M.

- ב. נניח שבקונפיגורציה ההתחלתית של המכונה M הראש הקורא-כותב של המכונה מצביע על הסימן # שמשמאל לקלט. אילו פעולות צריך לעשות כדי להביא את האוטומט ושתי המחסניות למצב שיתאים לקונפיגורציה זו?

**שאלה 6 (שאלת בונוס)**

הוכיחו שהמחלקה EXPTIME היא חסינה; כלומר, מחלקת הבעיות הניתנות לפתרון בזמן אקספוננציאלי היא אותה מחלקה בכל המודלים החישוביים האוניברסליים.



# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20290 – אלגוריתמיקה – יסודות מדעי המחשב

חומר הלימוד למטלה: פרקים 10-12

מספר השאלות: 6 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: ג2013 מועד אחרון להגשה: 2.9.2013

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט נמצא ב"נוהל הגשת מטלות מנחה" באתר הקורס.

## שאלה 1 (15 נקודות)

נתבונן בבעיית סיכום המשכורות המופיעה בספר – סיכום רשימת משכורות באורך  $N$ . בספר מתואר אלגוריתם מקבילי המשתמש ב-  $N/2$  מעבדים ופותר את הבעיה בזמן  $O(\log N)$ . הציעו אלגוריתם מקבילי המשתמש במספר קטן יותר (אסימפטוטית) של מעבדים, ופותר את הבעיה באותה סיבוכיות זמן.

## שאלה 2 (15 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 10 נק')

להלן נתון אלגוריתם מקבילי לפתרון הבעיה המוגדרת בשאלה 2 בממ"ן 12:

חשב-סכום-רישות-של-מערך  $A$  בגודל  $n$

$$i \leftarrow 1 \quad (1)$$

(2) כל עוד  $i \leq n/2$  בצע:

(2.1) לכל  $i + 1 \leq k \leq n$  בצע במקביל:

$$A[k] \leftarrow A[k] + A[k - i] \quad (2.1.1)$$

$$i \leftarrow 2 \times i \quad (2.2)$$

(3) חזור.

א. הריצו את האלגוריתם על המערך הבא:

1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

ב. נתחו את זמן הריצה ואת סיבוכיות המכפלה של האלגוריתם. האם הושג שיפור ביחס לאלגוריתם הסדרתי שרץ בזמן  $O(n)$ ?

### שאלה 3 (20 נקודות)

נתבונן בבעיית הקטע הקריטי עבור שלושה מעבדים. בגרסה זו של הבעיה יכולים להימצא בקטע הקריטי בכל רגע נתון מעבד אחד או שניים, אך לא כל שלושת המעבדים יחד. הסבירו מהם השינויים שצריך לעשות בפרוטוקול המופיע בספר (עמ' 279-278) בכדי להתאים אותו לגרסה זו של הבעיה.

### שאלה 4 (20 נקודות: סעיף א' – 5 נק'; סעיף ב' – 15 נק')

- א. המחלקה  $ZPP$  היא מחלקת כל הבעיות שעבורן קיים אלגוריתם לאס-וגאס. הוכיחו ש-  $P \subseteq ZPP$ .
- ב. אלגוריתם **אטלנטיק-סיטי** הוא אלגוריתם הסתברותי, שרץ בזמן פולינומיאלי ועלול לטעות טעות **דו-צדדית** בהסתברות שקטנה מ-  $1/3$ . כלומר, אם התשובה לבעיה היא "כן", אז האלגוריתם יחזיר "כן" בהסתברות שגדולה מ-  $2/3$ ; אם התשובה לבעיה היא "לא", אז האלגוריתם יחזיר "לא" בהסתברות שגדולה מ-  $2/3$ .
- המחלקה  $BPP$  היא מחלקת כל הבעיות שעבורן קיים אלגוריתם אטלנטיק-סיטי. הוכיחו ש-  $RP \subseteq BPP$ .

### שאלה 5 (30 נקודות: סעיפים א', ב', ג' – 5 נק' לכל אחד; סעיף ד' – 15 נק')

- ידוע שבתחום  $1..N$  קיימים בערך  $N/\log N$  מספרים ראשוניים. להלן נתון אלגוריתם אקראי לבחירת מספר ראשוני בתחום  $1..N$ . האלגוריתם משתמש באלגוריתם AKS – האלגוריתם הדטרמיניסטי לבדיקת ראשוניות שהתגלה בשנת 2002.
- (1) הגרל מספר אקראי  $x$  בתחום  $2..N$ ;
- (2) אם  $AKS(x) = \text{true}$ , אז החזר את  $x$  ועצור.
- (3) אחרת, חזור לשורה (1);
- א. מה הסיכוי שהאלגוריתם יצליח למצוא מספר ראשוני כבר בניסיון הראשון?
- ב. מה הסיכוי שגם לאחר עשרה ניסיונות האלגוריתם לא ימצא מספר ראשוני?
- ג. הוכיחו שהסיכוי שהאלגוריתם לא יצליח למצוא מספר ראשוני ב-  $\log N$  הניסיונות הראשונים קטן מ-  $2/5$  (עבור  $N$  מספיק גדול).
- ד. איה מעוניינת להתחיל להשתמש במערכת RSA. לשם כך היא צריכה ליצור מפתח פרטי וציבורי. היא הפעילה את האלגוריתם המתואר לעיל כדי לבחור שני מספרים ראשוניים, וקבלה את המספרים 11 ו-29. המספר  $Priv$  שבחרה איה הוא 187. מה יהיה המפתח הציבורי של איה?

### שאלה 6 (שאלת בונוס)

בעמוד 336 בספר מוזכרים שני טיעונים הכופרים באפשרות קיומה של מכונה אינטליגנטית. חוו דעתכם על שני טיעונים אלה ונסו להביא טיעוני-נגד.