א1

$$\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}2^n} = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}2^n}}^{a_n} + \overbrace{(-1)^n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}}^{b_n}$$

$$\forall n,\ |a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ is a geometric series that converges, hence $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converges absolutely by the comparison test.

$$\forall n,\ |b_n| = \frac{\left|\sin\frac{1}{n}\right|}{\sqrt{n}} \overset{\substack{f(x)=\sin(\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\nearrow 0,\ f(1)<0 \\ \uparrow}}{\leq} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converges, and again by the comparison test, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converges absolutely.

In conclusion, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$ converges from $X.9$ and since $|a_n+b_n|\leq|a_n|+|b_n|$ the comparison test tells us that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}2^n}$$

converges absolutely.

Let $a_n = \frac{\cos 2n}{\ln\left(n^n+n^2\right)}$, $b_n = 1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$. **1 ב**

---

(1)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ converges, and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{2n}\right)^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} \overset{\overset{VII.18}{\uparrow}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 2$$

Since $\forall n,\ b_n \geq 0$, the limit comparison test tells us that $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges absolutely.

---

(2)

If $f(x) = \ln\left(x^x + x^2\right)$, then $f'(x) = \frac{x^x \ln x + 2x + x^x}{x^x + x^2} > 0$ for every $x \geq 1$. Then $f(x)$ is increasing, thus $\frac{1}{f(x)}$ is decreasing which tells us that $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{\ln\left(n^n+n^2\right)}$ is decreasing. Also,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)} = 0 \overset{\overset{\text{VII.18}}{\uparrow}}{\implies} \frac{1}{\ln\left(n^n+n^2\right)} \to 0$$

The series $\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n$ is bounded (question 33, 6th unit) and $X.22$ tells us that

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\,\frac{1}{\ln\left(n^n+n^2\right)} \text{ converges}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ doesn't converge absolutely since:

$$|a_n| = \left|\frac{\cos 2n}{\ln\left(n^n+n^2\right)}\right| \geq \underbrace{\frac{\cos^2 2n}{\ln\left(n^n+n^2\right)}}_{c_n} = \underbrace{\frac{\cos 4n}{2\ln\left(n^n+n^2\right)}}_{d_n} - \underbrace{\frac{1}{2\ln\left(n^n+n^2\right)}}_{e_n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ converges by the same arguments as $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Had $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converged, by $X.9$ we would get that $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ converges but that's a contradiction because

$$1/2 \overset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\uparrow}{\leftarrow}} \frac{n \ln n}{2\ln(2n^n)} \leq \frac{n \ln n}{2\ln(n^n + n^2)} \leq \frac{n \ln n}{2\ln(n^n)} = 1/2$$

Thus, $\frac{n \ln n}{2\ln(n^n+n^2)} \to 1/2 > 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverges according to question 27 in the 6th unit and in conclusion $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ diverges by the limit comparison test.

Then

$$\sum_{n=1} c_n \text{ diverges} \implies \sum_{n=1} |a_n| \text{ diverges}$$

by the comparison test and in conclusion $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges conditionally.

From (1), (2), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converges by $X.9$, and we if assume that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ converges then $|a_n| = |a_n + b_n - b_n| \leq |a_n + b_n| + |b_n|$ which implies that $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges, but we saw it diverges.

Hence $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ diverges and $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ converges conditionally. QED.

ב) נניח ש- $a>1$ אז $\left|\frac{a^{v_1+\dots+v_{n+1}}}{a^{v_1+\dots+v_n}}\right| = \frac{a^{v_1+\dots+v_n}}{a^{v_1+\dots+v_n}} a^{v_{n+1}} = a^{v_{n+1}} \overset{V11.17}{\to} a^{v}$.

לכן מהנתון ש- $v<0$ ומההנחה נקבל $a^v<1$ (שכן $a^v = e^{v\ln a} < e^0 = 1$) ומשפט X.17** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{v_1+\dots+v_n}$ מתכנס.

נניח שהטור הנתון מתכנס. אם $a=1$ אז $1^{v_1+\dots+v_n} \to 1$ וזו סתירה לתנאי ההכרחי.
אז $a^{v_1+\dots+v_n} \to 0$ $= e^{(v_1+\dots+v_n)\ln a}$ כלומר $(v_1+\dots+v_n)\ln a \to -\infty$ (*). נשים לב ש- $(v_1+\dots+v_n) = n \cdot \frac{v_1+\dots+v_n}{n} \overset{V11.1a}{\to} -\infty$ ולכן אם נניח בשלילה ש- $a<1$ אז $(v_1+\dots+v_n)\ln a \to \infty$ וזו סתירה ל- (*) ולכן $a>1$.

ג) ① $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}\right| = \left|\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}}\right| = |a_na_{n+1}| \to a^2>0$

② $\left|\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}{a_{n+1}-a_n}\right| = \left|\frac{\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}\right| = \frac{1}{|a_na_{n+1}|} \to \frac{1}{a^2}>0$

ממשפט X.15 ומ- ① ו- ② נסיק ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ מתכנס אמ"ם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ מתכנס.

ו) נגדיר $f(n)=n$. ברור ש- f חח"ע ועל. הסדרה $\{\ln(1+\frac{1}{n})\}$ יורדת שכן אם $h(x)=\ln(1+\frac{1}{x})$ אז $h'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}<0$ לכל $x\geq1$. כמו כן $\ln(1+\frac{1}{n})\to0$ לפי V11.18. ממשפט לייבניץ נסיק ש- $\sum(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$ מתכנס.

הטור הנ"ל לא מתכנס בהחלט שכן $\frac{|(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{V11.18}{=} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{לופיטל}{\to} 1$ וממבחן ההשוואה הגבולי נסיק את הנדרש.

הראינו שהטור $\sum(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$ מתכנס בתנאי וממשפט X.27 נסיק שקיימת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל כך ש- $\sum(-1)^{f(n)}\ln(1+\frac{1}{f(n)})=\ln 2011$ (שכן f מתקבלת ע"י שינוי סדר איברי g).

4) ב) עבור $a>0$ נשים לב שלכל $x>0$ הפונקציה $f(x)=\frac{a}{a^2+x^2}$ יורדת וחיובית כמו כן $\frac{a}{a^2+x^2}\le\frac{1}{x^2}$

וממבחן ההשוואה לאינטגרלים נקבל ש- $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס. לכן ממשפט 8.4.x גם הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n=\sum_{n=1}^\infty\frac{a}{a^2+n^2}$

מתכנס. מהוכחת משפט זה אנו יודעים שלכל k מתקיים $(*)\ a_{k+1}\le\int_k^{k+1}f(x)dx$

ולכן $\sum_{k=1}^\infty a_{k+1}\le\sum_{k=1}^\infty\int_k^{k+1}f(x)dx$ כלומר $\sum_{k=2}^\infty a_k\le\int_1^\infty f(x)dx$.

נשים לב ש: $\int_1^\infty f(x)dx=\frac{1}{a}\int_1^\infty\frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}=\int_{\frac{1}{a}}^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{a}<\frac{\pi}{4}$ ($\arctan x$ עולה, $a<1$) ולכן $a_1+\sum_{k=2}^\infty a_k=\sum_{k=1}^\infty a_k<\frac{\pi}{4}+\frac{a}{a^2+1}$ (1)

הפונקציה $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ מקבלת מקסימום ב- $x=1$ בקטע $[0,1]$ (שכן $g'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}>0$ לכל $0<x<1$ ו- $g(0)<g(1)$)

כלומר לכל $0<x<1$, $g(x)\le\frac{1}{2}$ (2).

סה״כ מ- (1) ו- (2) קיבלנו $\sum_{n=1}^\infty a_n<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ מ.ש.ל.

5) א) אם $\sum a_n$ מתכנס אז מהתנאי ההכרחי $a_n\to0$ ולכן $\cos a_n\to1$ (משפט 7.11.7). קיבלנו שהתנאי ההכרחי לא מתקיים ולכן $\sum\cos a_n$ מתבדר וסתירה להנחה.

ב) אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\frac{a_n^2+a_n}{a_n}=a_n+1\to1$ ולכן ממבחן ההשוואה השני $\sum a_n^2+a_n$ מתכנס.

אם $\sum a_n^2+a_n$ מתכנס אז $0\le a_n\le a_n+a_n^2$ וממבחן ההשוואה הראשון $\sum a_n$ מתכנס.

ג) $\sum_{n=1}^\infty|a_{n+1}-a_n|$ מתכנס ולכן לפי ק.ק. לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $N<n<m$ מתקיים:

$|a_{m+1}-a_{n+1}|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}(a_{k+1}-a_k)\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}|a_{k+1}-a_k|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}|a_{k+1}-a_k|\right|<\varepsilon$ (אי שוויון המשולש). נסמן $l=n+1$, $k=m+1$ אז לכל $\varepsilon>0$

קיים N כך שלכל $N<l<k$ מתקיים $|a_k-a_l|<\varepsilon$ ולכן (a_n) היא סדרת קושי ולכן מתכנסת. מ.ש.ל.

ד) הטענה נכונה. נגדיר את הסדרה (a_{n_k}) באינדוקציה על k: $k=1$, נבחר n_1 כך ש- $|a_{n_1}|<1$ המינימלי המקיים תכונה זו. קיים n_1 כזה שכן $a_n\to0$.

נניח שמצאנו $n_1,\dots,n_l$ המקיימים $n_1<\dots<n_l$ ו- $|a_{n_i}|<\frac{1}{i^2}$ כאשר $i=1,\dots,l$ אז נגדיר את n_{l+1} כך ש- $|a_{n_{l+1}}|<\frac{1}{(l+1)^2}$ וכן $n_l<n_{l+1}$ המינימלי שמקיים תכונה זו. קיום של n_{l+1} מובטח שכן $a_n\to0$.

סה״כ הגדרנו סדרה חלקית (a_{n_k}) של (a_n) המקיימת $|a_{n_k}|<\frac{1}{k^2}$ לכל k וממבחן ההשוואה הראשון נסיק ש- $\sum_{k=1}^\infty a_{n_k}$ מתכנס בהחלט כנדרש.

ב

Let $A_n,\ B_n,\ C_n$ be the partial sums of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ respectively. Then

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = A_{2n}$$

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) = A_{2n-1}$$

So $B_n,\ C_n$ are subsequences of A_n. Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = S \implies \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = S$$

which implies (using question 100 in the 3rd unit) that $A_n \to S$ or $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ as needed.

א

From (ב), $B_n = A_{2n}$ and $C_n = A_{2n-1}$ therefore

$$B_n - C_n = A_{2n} - A_{2n=1} = \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = a_{2n}$$

Since a_{2n} is a subsequence of a_n, and it is known that $a_n \to 0$, the above implies $B_n - C_n \to 0$. B_n and C_n both converge, which gives us

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n$$

And then we can use the result of (ב) to conclude that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

ג

If $a_n = (-1)^n$ then:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges (implied by $X.5$).
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{2n-1} + (-1)^{2n}) = 0$
- $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} ((-1)^{2n-2} + (-1)^{2n-1}) = 0$ and from $X.12$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n = -1$.

And the problem was disproved.